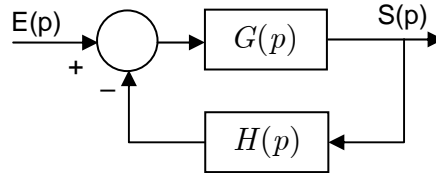


Exercice n°1

Tracer les lieux d'Evans des systèmes représentés par le schéma fonctionnel suivant. Etudier leur stabilité :



a) $G(p) = \frac{p+2}{p}$ $H(p) = \frac{p+3}{p+1}$

Pour quelles valeurs du gain K le système est-il oscillant amorti ?

b) $G(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p+4)^2}$ $H(p) = 1$

c) $G(p) = \frac{p}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 (p+5)}$ $H(p) = 1$

d) $G(p) = \frac{p+1}{p(p-1)}$ $H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 16}$

On donne : $3x^4 + 10x^3 + 21x^2 + 24x - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -0.45 \\ x_2 = -2.26 \\ x_{3,4} = -0.76 \pm j2.16 \end{cases}$

e) $G(p) = \frac{p^2 - 2p + 5}{p^3 + 5p^2 + 12p - 18} = \frac{(p-1+2j)(p-1-2j)}{(p-1)(p+3+3j)(p+3-3j)}$ $H(p) = 1$

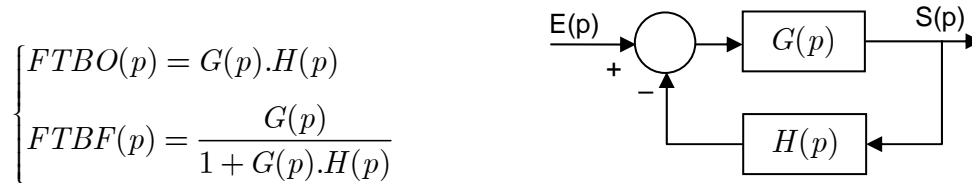
On donne : $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 86x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3.7 \\ x_2 = -0.27 \\ x_{3,4} = 3.99 \pm j2.79 \end{cases}$

f) $G(p) = \frac{p+1}{p^2}$ $H(p) = 1$

- ✓ Si on veut obtenir un système dont $\xi = 0.5$, que doit valoir le gain K ?
- ✓ Donner, dans ce cas, les valeurs de ω_n et $d\%$, ainsi que la position des pôles correspondants en boucle fermée.

Exercice n°1

Traçons les Lieux d'Evans des systèmes représentés par le schéma fonctionnel suivant et étudions leur stabilité à partir de ce lieu.



Le lieu d'Evans représente le lieu des pôles de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée, lorsque le gain K varie. Il est donc tracé à partir de l'équation caractéristique paramétrée avec $K \geq 0$.

$$\begin{cases} FTBO(p) = K.G(p).H(p) \\ FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + K.G(p).H(p)} \\ 1 + K.G(p).H(p) = 0 \quad (\text{équation caractéristique}) \\ K \geq 0 \end{cases}$$

$$a) \quad G(p) = \frac{p+2}{p} \quad H(p) = \frac{p+3}{p+1}$$

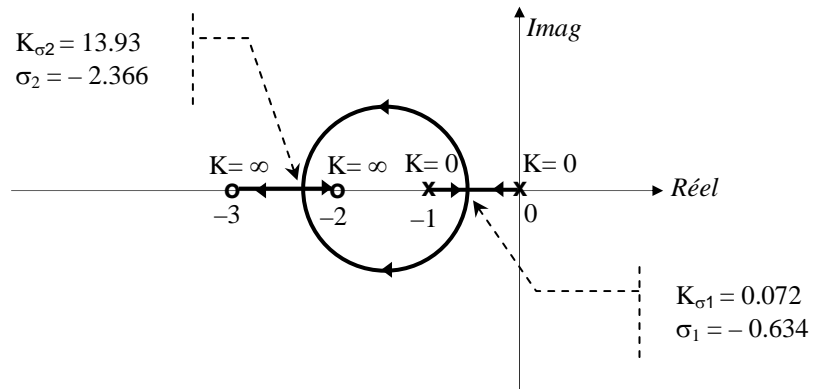
$$\Rightarrow \begin{cases} FTBO(p) = \frac{K(p+2)(p+3)}{p(p+1)} \\ 1 + \frac{K(p+2)(p+3)}{p(p+1)} = 0 \quad (\text{équation caractéristique}) \end{cases}$$

- Points de départ du lieu (les pôles de la FTBO) : $\begin{cases} p=0 \\ p=-1 \end{cases} \Rightarrow n=2$
- Points d'arrivée du lieu (les zéros de la FTBO) : $\begin{cases} p=-2 \\ p=-3 \end{cases} \Rightarrow m=2$
- Nombre de branches asymptotiques : $n-m=2-2=0$ *branche asymptotique*
- Déviations des branches asymptotiques : A ne pas calculer car il n'y a pas de branche asymptotique.
- Intersection des asymptotes sur l'axe réel : A ne pas calculer car il n'y a pas de branche asymptotique.
- On commence à tracer une ébauche du lieu d'Evans.

✓ On positionne les pôles et les zéros dans le plan complexes. Les pôles correspondent à $K=0$, les

zéros à $K=\infty$.

- ✓ On détermine les parties de l'axe réel qui appartiennent au lieu : $[-3 \quad -2]$ et $[-1 \quad 0]$.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 pôles adjacents ($p = -1$ et $p = 0$). Donc, il y a forcément un point de séparation.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 zéros adjacents ($p = -3$ et $p = -2$). Donc, il y a forcément un point de rencontre.



- Points σ de séparation ou de rencontre sur l'axe réel :

$$\begin{aligned}
 1^{\text{ère}} \text{ méthode : } & \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - \text{pôle}_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - \text{zéro}_i} = 0 \\
 & \frac{1}{\sigma + 0} + \frac{1}{\sigma + 1} - \frac{1}{\sigma + 2} - \frac{1}{\sigma + 3} = 0 \\
 & \sigma^2 + 3\sigma + \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = -0.634 \\ \sigma_2 = -2.366 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode : } \text{ A partir de l'équation caractéristique : } 1 + \frac{K(p+2)(p+3)}{p(p+1)} = 0$$

$$K(p) = -\frac{p(p+1)}{(p+2)(p+3)} \quad \Rightarrow \quad K(\sigma) = -\frac{\sigma(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\sigma+3)}$$

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 + 3\sigma + \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = -0.634 \\ \sigma_2 = -2.366 \end{cases}$$

Les 2 racines appartiennent au lieu. Elles forment donc des points de séparation et de rencontre.

- Valeurs du gain aux points de séparation et de rencontre sur l'axe réel :

- ✓ Calcul de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

La condition sur le module donne la valeur de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

$$|FTBO(\sigma_1)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_{\sigma 1} = \left| \frac{\sigma(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\sigma+3)} \right|_{\sigma=-0.634} \Rightarrow K_{\sigma 1} = 0.072$$

$$|FTBO(\sigma_2)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_{\sigma 2} = \left| \frac{\sigma(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\sigma+3)} \right|_{\sigma=-2.366} \Rightarrow K_{\sigma 2} = 13.93$$

- *Détermination de l'équation du cercle :*

Nous pouvons montrer que le lieu est un cercle en coordonnées polaires en posant $p = x + jy$ dans l'équation caractéristique du système.

$$\begin{cases} 1 + \frac{K(p+2)(p+3)}{p(p+1)} = 0 \\ p = x + jy \end{cases} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Ceci est l'équation d'un cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de centre $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Nous pouvons retrouver les valeurs de σ_1 et de σ_2 en considérant uniquement la position du cercle et son rayon :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \text{centre} + \text{rayon} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.634 \\ \sigma_2 = \text{centre} - \text{rayon} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.366 \end{cases}$$

- *Stabilité :*

Lorsque le gain K varie entre 0 et ∞ , les racines de l'équation caractéristique (c'est-à-dire les pôles de la FTBF) restent dans le demi-plan gauche du plan complexe (racines réelles négatives ou complexes conjuguées à partie réelle négative). Le système reste donc toujours stable.

- *Pour quelles valeurs du gain K le système est-il oscillant amorti ?*

Le système est oscillant amorti lorsque les pôles sont complexes conjugués, c'est-à-dire, pour :

$$K_{\sigma 1} < K < K_{\sigma 2}$$

$$b) \quad \boxed{G(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p+4)^2} \quad H(p) = 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FTBO(p) = \frac{K}{(p-1)(p+1)(p+4)^2} \\ 1 + \frac{K}{(p-1)(p+1)(p+4)^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

$$\bullet \text{ Points de départ du lieu (les pôles de la FTBO) : } \begin{cases} p = 1 \\ p = -1 \\ p = -4 \text{ (double)} \end{cases} \Rightarrow n = 4$$

$$\bullet \text{ Points d'arrivée du lieu (les zéros de la FTBO) : } \{ \text{Aucun} \} \Rightarrow m = 0$$

$$\bullet \text{ Nombre de branches asymptotiques : } n - m = 4 - 0 = 4 \text{ branches asymptotiques}$$

$$\bullet \text{ Déviation des branches asymptotiques : } \varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i+1)}{n-m} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = \frac{\pm 180^\circ}{4} (2i+1) \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = +45^\circ, -45^\circ, +135^\circ, -135^\circ \quad (4 \text{ angles})$$

- Intersection des asymptotes sur l'axe réel :

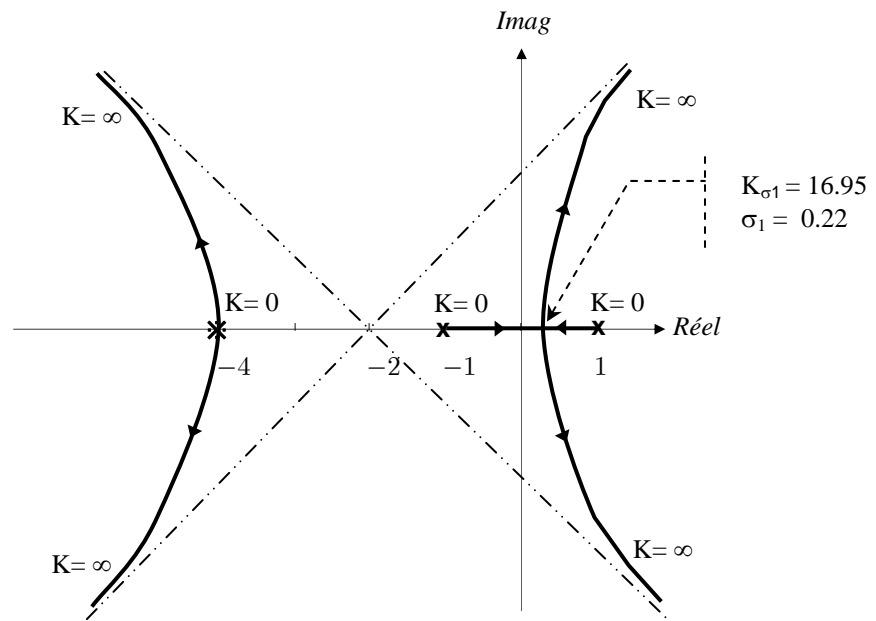
$$x_i = \frac{\sum \text{pôles de } FTBO(p) - \sum \text{zéros de } FTBO(p)}{n - m}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{(1 - 1 - 4 - 4)}{4}$$

$$\Rightarrow x_i = -2$$

- On commence à tracer une ébauche du lieu d'Evans.

- ✓ On positionne les pôles et les zéros dans le plan complexes. Les pôles correspondent à $K=0$, les zéros à $K=\infty$.
- ✓ On détermine les parties de l'axe réel qui appartiennent au lieu : $[-4]$ et $[-1 \quad +1]$.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 pôles confondus ($p = -4$). Donc, il y a forcément un point de séparation.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 pôles adjacents ($p = -1$ et $p = +1$). Donc, il y a forcément un point de séparation.



- Points σ de séparation ou de rencontre sur l'axe réel :

$$1^{\text{ère}} \text{ méthode : } \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - \text{pôle}_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - \text{zéro}_i} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma + 1} + \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{2}{\sigma + 4} = 0$$

$$2\sigma^2 + 4\sigma - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0.22 \\ \sigma_2 = -2.22 \text{ (à exclure, } \notin \text{ au lieu)} \end{cases}$$

Cette méthode ne donne pas l'autre point de séparation (mais, néanmoins, évident) qu'est le pôle double ($\sigma = -4$).

2^{ème} méthode : A partir de l'équation caractéristique : $1 + \frac{K}{(p-1)(p+1)(p+4)^2} = 0$

$$K(p) = -(p-1)(p+1)(p+4)^2 \Rightarrow K(\sigma) = -(\sigma-1)(\sigma+1)(\sigma+4)^2$$

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = 0 \Rightarrow (\sigma+4)(2\sigma^2 + 4\sigma - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -4 \\ \sigma_2 = 0.22 \\ \sigma_3 = -2.22 \text{ (à exclure, } \notin \text{ au lieu)} \end{cases}$$

En définitive, les points de séparation sont : $\begin{cases} \sigma_1 = -4 \\ \sigma_2 = 0.22 \end{cases}$

- Valeurs du gain aux points de séparation et de rencontre sur l'axe réel :

✓ Calcul de K_{σ_1} et de K_{σ_2} :

La condition sur le module donne la valeur de K_{σ_1} et de K_{σ_2} :

$$|FTBO(\sigma_1)| = 1 \Rightarrow K_{\sigma_1} = \left| -(\sigma-1)(\sigma+1)(\sigma+4)^2 \right|_{\sigma=-4} \Rightarrow K_{\sigma_1} = 0$$

$$|FTBO(\sigma_2)| = 1 \Rightarrow K_{\sigma_2} = \left| -(\sigma-1)(\sigma+1)(\sigma+4)^2 \right|_{\sigma=0.22} \Rightarrow K_{\sigma_2} = 16.95$$

- Stabilité :

Lorsque le gain K varie entre 0 et ∞ , il y a, au moins, une racine (un pôle de la FTBF) qui reste toujours dans le demi-plan droit du plan complexe. Le système est, par conséquent, toujours instable.

$$c) \boxed{G(p) = \frac{p}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 (p+5)} \quad H(p) = 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FTBO(p) = \frac{Kp}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 (p+5)} \\ 1 + \frac{Kp}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 (p+5)} = 0 \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

- Points de départ du lieu (les pôles de la FTBO) : $\begin{cases} p = 1/2 \text{ (double)} \\ p = -5 \end{cases} \Rightarrow n = 3$
- Points d'arrivée du lieu (les zéros de la FTBO) : $\{p = 0\} \Rightarrow m = 1$
- Nombre de branches asymptotiques : $n - m = 3 - 1 = 2$ branches asymptotiques

- Déviation des branches asymptotiques : $\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i+1)}{n-m} \quad (i=0, 1, 2, \dots)$

$$\Rightarrow \varphi_i = \frac{\pm 180^\circ}{2}(2i+1) \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = +90^\circ, -90^\circ \quad (2 \text{ angles})$$

- Intersection des asymptotes sur l'axe réel :

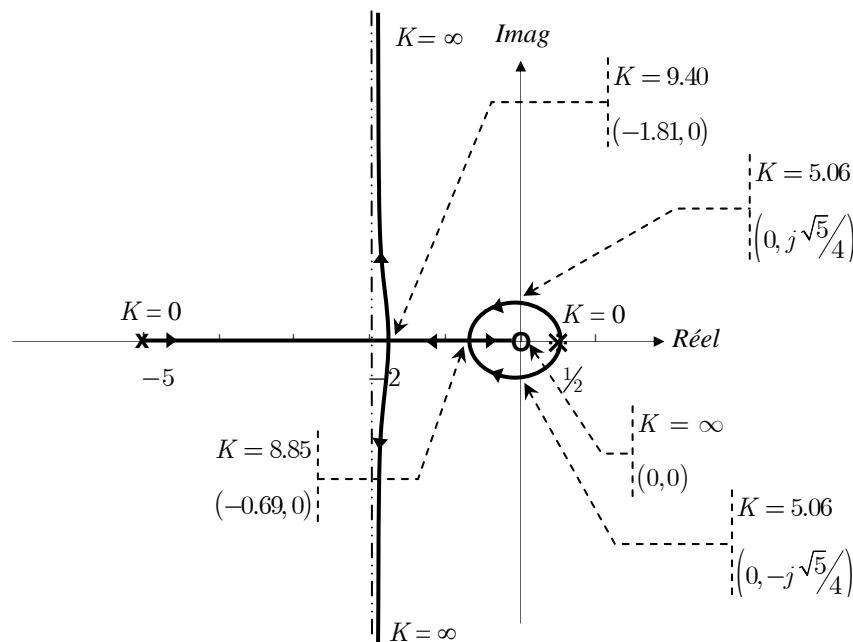
$$x_i = \frac{\sum \text{pôles de } FTBO(p) - \sum \text{zéros de } FTBO(p)}{n-m}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{(1/2 + 1/2 - 5) - 0}{2}$$

$$\Rightarrow x_i = -4/2 = -2$$

- On commence à tracer une ébauche du lieu d'Evans.

- ✓ On positionne les pôles et les zéros dans le plan complexes. Les pôles correspondent à $K=0$, les zéros à $K=\infty$.
- ✓ On détermine les parties de l'axe réel qui appartiennent au lieu : $[-5 \quad 0]$ et $[1/2]$.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 pôles confondus ($p = 1/2$). Donc, il y a forcément un point de séparation.



- Points σ de séparation ou de rencontre sur l'axe réel :

$$1^{\text{ère}} \text{ méthode : } \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - \text{pôle}_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - \text{zéro}_i} = 0$$

$$\frac{2}{\sigma - 1/2} + \frac{1}{\sigma + 5} - \frac{1}{\sigma} = 0$$

$$4\sigma^2 + 10\sigma + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -0.69 \\ \sigma_2 = -1.81 \end{cases}$$

Cette méthode ne donne pas l'autre point de séparation (mais, néanmoins, évident) qu'est le pôle double ($\sigma = 1/2$).

2^{ème} méthode : A partir de l'équation caractéristique : $1 + \frac{Kp}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 (p + 5)} = 0$

$$K(p) = -\frac{(p - 1/2)^2 (p + 5)}{p} \Rightarrow K(\sigma) = -\frac{(\sigma - 1/2)^2 (\sigma + 5)}{\sigma}$$

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = 0 \Rightarrow (\sigma - 1/2)(4\sigma^2 + 10\sigma + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -0.69 & (\text{point de rencontre}) \\ \sigma_2 = -1.81 & (\text{point de séparation}) \\ \sigma_3 = -1/2 & (\text{point de séparation}) \end{cases}$$

- Valeurs du gain aux points de séparation et de rencontre sur l'axe réel :

✓ Calcul de K_{σ_1} et de K_{σ_2} :

La condition sur le module donne la valeur de K_{σ_1} et de K_{σ_2} :

$$|FTBO(\sigma_1)| = 1 \Rightarrow K_{\sigma_1} = \left| -\frac{(\sigma - 1/2)^2 (\sigma + 5)}{\sigma} \right|_{\sigma = -0.69} \Rightarrow K_{\sigma_1} = 8.85$$

$$|FTBO(\sigma_2)| = 1 \Rightarrow K_{\sigma_2} = \left| -\frac{(\sigma - 1/2)^2 (\sigma + 5)}{\sigma} \right|_{\sigma = -1.81} \Rightarrow K_{\sigma_2} = 9.40$$

✓ $K_{\sigma_3} = 0$

- Intersection du lieu avec l'axe imaginaire :

$$\begin{cases} 1 + \frac{Kp}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 (p + 5)} = 0 \\ p = j\omega \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = 5.06 \\ \omega = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 5.06 \\ p_{1,2} = \pm j \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

- Stabilité :

- ✓ Pour $0 \leq K \leq 5.06$, 2 pôles sur 3 se trouvent dans le demi-plan droit du plan complexe. Le système est alors instable.
- ✓ Pour $K > 5.06$, les 3 pôles se trouvent dans le demi-plan gauche du plan complexe. Le système est alors stable.

$$d) \quad G(p) = \frac{p+1}{p(p-1)} \quad H(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FTBO(p) = \frac{K(p+1)}{p(p-1)(p^2 + 4p + 16)} \\ 1 + \frac{K(p+1)}{p(p-1)(p^2 + 4p + 16)} = 0 \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

- Points de départ du lieu (les pôles de la FTBO) : $\begin{cases} p=0 \\ p=1 \\ p=-2 \pm j2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow n=4$
- Points d'arrivée du lieu (les zéros de la FTBO) : $\{p=-1\} \Rightarrow m=1$
- Nombre de branches asymptotiques : $n-m=4-1=3$ branches asymptotiques
- Déviations des branches asymptotiques : $\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i+1)}{n-m} \quad (i=0, 1, 2, \dots)$

$$\Rightarrow \varphi_i = \frac{\pm 180^\circ}{3}(2i+1) \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = +60^\circ, -60^\circ, 180^\circ \quad (3 \text{ angles})$$

- Intersection des asymptotes sur l'axe réel :

$$x_i = \frac{\sum \text{pôles de } FTBO(p) - \sum \text{zéros de } FTBO(p)}{n-m}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{(0 + 1 - 2 + j2\sqrt{3} - 2 - j2\sqrt{3}) - (-1)}{3}$$

$$\Rightarrow x_i = -\frac{2}{3} \approx -0.66$$

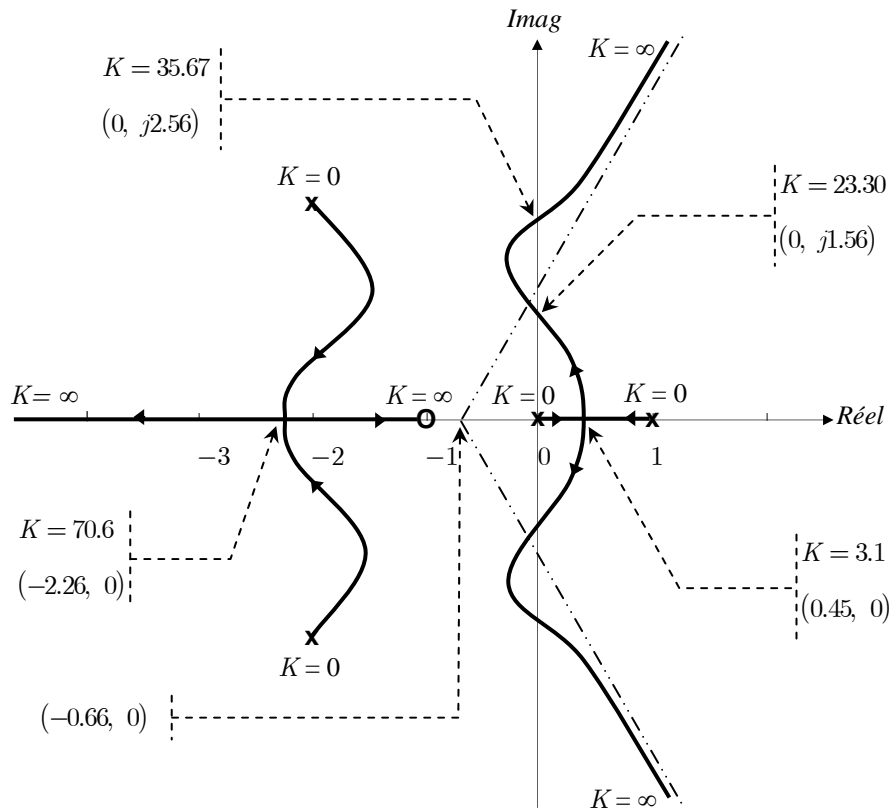
- On commence à tracer une ébauche du lieu d'Evans.

- ✓ On positionne les pôles et les zéros dans le plan complexes. Les pôles correspondent à $K=0$, les zéros à $K=\infty$.
- ✓ On détermine les parties de l'axe réel qui appartiennent au lieu : $]-\infty, -1]$ et $[0, 1]$.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 pôles adjacents ($p=0$ et $p=+1$). Donc, il y a forcément un point de séparation.
- ✓ On remarque qu'il y a 2 zéros adjacents ($p=-1$ et un autre à l'infini). Donc, il y a forcément un point de rencontre.

- Points σ de séparation ou de rencontre sur l'axe réel :

$$1^{\text{ère}} \text{ méthode : } \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - \text{pôle}_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - \text{zéro}_i} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma+2-j2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sigma+2+j2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sigma+1} = 0$$



$$\Rightarrow 3\sigma^4 + 10\sigma^3 + 21\sigma^2 + 24\sigma - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0.45 \\ \sigma_2 = -2.26 \\ \sigma_{3,4} = -0.76 \pm j2.16 \quad \notin \text{au lieu (à éliminer)} \end{cases}$$

2^{ème} méthode : A partir de l'équation caractéristique : $1 + \frac{K(p+1)}{p(p-1)(p^2+4p+16)} = 0$

$$K(p) = -\frac{p(p-1)(p^2+4p+16)}{(p+1)} \Rightarrow K(\sigma) = -\frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma^2+4\sigma+16)}{(\sigma+1)}$$

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = 0 \Rightarrow 3\sigma^4 + 10\sigma^3 + 21\sigma^2 + 24\sigma - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0.45 \\ \sigma_2 = -2.26 \\ \sigma_{3,4} = -0.76 \pm j2.16 \quad \notin \text{au lieu (à éliminer)} \end{cases}$$

- Valeurs du gain aux points de séparation et de rencontre sur l'axe réel :

✓ Calcul de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

La condition sur le module donne la valeur de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

$$|FTBO(\sigma)| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_{\sigma 1} = \left| -\frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma^2+4\sigma+16)}{(\sigma+1)} \right|_{\sigma=-0.45} & \Rightarrow K_{\sigma 1} = 3.1 \\ K_{\sigma 2} = \left| -\frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma^2+4\sigma+16)}{(\sigma+1)} \right|_{\sigma=-2.26} & \Rightarrow K_{\sigma 2} = 70.6 \end{cases}$$

- Intersection du lieu avec l'axe imaginaire :

$$\begin{cases} 1 + \frac{K(p+1)}{p(p-1)(p^2+4p+16)} = 0 \\ p = j\omega \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

On trouve qu'il y a 4 points d'intersection :

$$\begin{cases} K_{1,2} = 23.30 \\ \omega_{1,2} = \pm 1.56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{1,2} = 23.30 \\ p_{1,2} = \pm j1.56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{3,4} = 35.67 \\ \omega_{3,4} = \pm 2.56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{3,4} = 35.67 \\ p_{3,4} = \pm j2.56 \end{cases}$$

- Angles de départ du lieu à partir des pôles complexes conjugués :

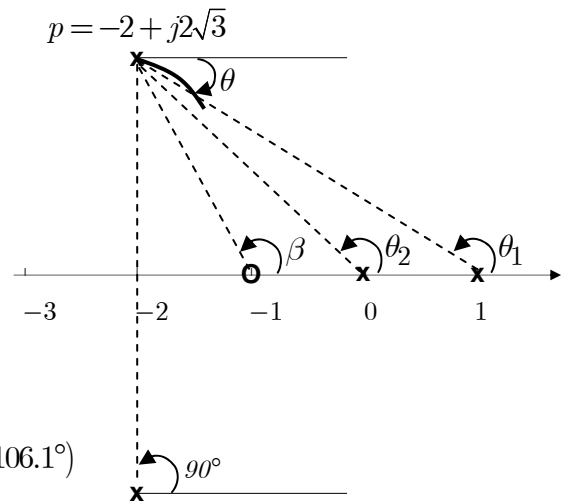
$\theta = 180^\circ - (\text{Somme des angles des vecteurs entre le pôle complexe concerné et les autres pôles})$
 $+ (\text{Somme des angles des vecteurs entre le pôle complexe concerné et les zéros})$

Considérons le pôle : $p = -2 + j2\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \theta_1 = 180^\circ - \arctg \frac{2\sqrt{3}}{3} = 130.9^\circ \\ \theta_2 = 180^\circ - \arctg \frac{2\sqrt{3}}{2} = 120^\circ \\ \beta = 180^\circ - \arctg \frac{2\sqrt{3}}{1} = 106.1^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - (130.9^\circ - 120^\circ - 90^\circ) + (106.1^\circ)$$

$$\Rightarrow \theta = -54.8^\circ$$



- Stabilité :

Comme on le voit sur le lieu d'Evans, la FTBF du système est composée de 4 pôles :

- ✓ 2 pôles évoluent toujours dans le demi-plan gauche du plan complexe. Ils sont toujours stables.
- ✓ 2 pôles évoluent tantôt dans le demi-plan gauche du plan complexe et tantôt dans le demi-plan droit. Ils sont stables entre $p_{1,2} = \pm j1.56$ et $p_{3,4} = \pm j2.56$. Ils sont instables ailleurs.

Par conséquent, le lieu est stable uniquement pour : $23.30 < K < 35.67$

$$e) \quad G(p) = \frac{p^2 - 2p + 5}{p^3 + 5p^2 + 12p - 18} = \frac{(p - 1 + 2j)(p - 1 - 2j)}{(p - 1)(p + 3 + 3j)(p + 3 - 3j)} \quad H(p) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FTBO(p) = \frac{K(p^2 - 2p + 5)}{p^3 + 5p^2 + 12p - 18} \\ 1 + \frac{K(p^2 - 2p + 5)}{p^3 + 5p^2 + 12p - 18} = 0 \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

- Points de départ du lieu (les pôles de la FTBO) : $\begin{cases} p = 1 \\ p = -3 \pm 3j \end{cases} \Rightarrow n = 3$
- Points d'arrivée du lieu (les zéros de la FTBO) : $\{p = 1 \pm 2j\} \Rightarrow m = 2$
- Nombre de branches asymptotiques : $n - m = 3 - 2 = 1$ branche asymptotique
- Déviation des branches asymptotiques : $\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i + 1)}{n - m} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$

$$\Rightarrow \varphi_i = \frac{\pm 180^\circ}{1}(2i + 1) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = 180^\circ \quad (1 \text{ angle})$$
- Intersection des asymptotes sur l'axe réel : A ne pas calculer car il n'y a qu'une seule branche asymptotique.
- On commence à tracer une ébauche du lieu d'Evans.
 - ✓ On positionne les pôles et les zéros dans le plan complexes. Les pôles correspondent à $K=0$, les zéros à $K=\infty$.
 - ✓ On détermine les parties de l'axe réel qui appartiennent au lieu : $]-\infty \quad 1]$.
- Points σ de séparation ou de rencontre sur l'axe réel :

$$1^{\text{ère}} \text{ méthode : } \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - p_{\text{pôle}_i}} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - z_{\text{zéro}_i}} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma + 3 + 3j} + \frac{1}{\sigma + 3 - 3j} - \frac{1}{\sigma - 1 + 2j} - \frac{1}{\sigma - 1 - 2j} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^4 - 4\sigma^3 - 7\sigma^2 + 86\sigma + 24 = 0$$

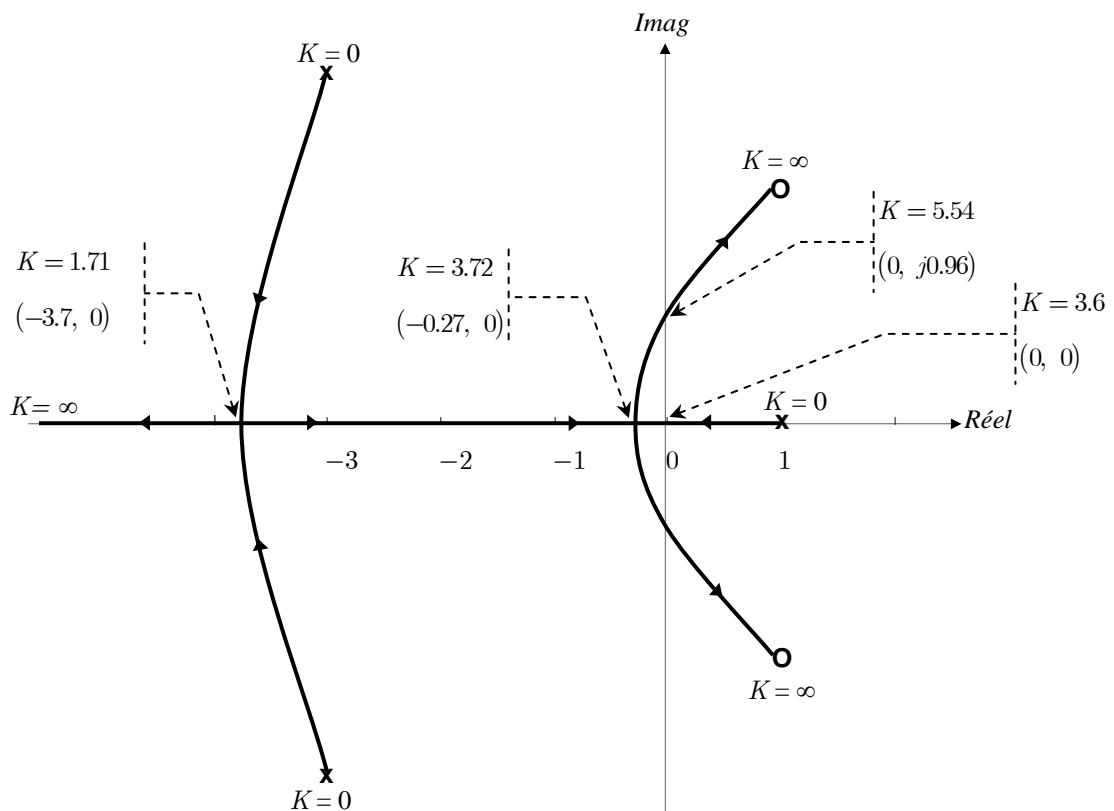
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -3.7 \\ \sigma_2 = -0.27 \\ \sigma_{3,4} = 3.99 \pm j2.79 \quad \notin \text{au lieu (à éliminer)} \end{cases}$$

2^{ème} méthode : A partir de l'équation caractéristique : $1 + \frac{K(p^2 - 2p + 5)}{p^3 + 5p^2 + 12p - 18} = 0$

$$K(p) = -\frac{p^3 + 5p^2 + 12p - 18}{p^2 - 2p + 5} \Rightarrow K(\sigma) = -\frac{\sigma^3 + 5\sigma^2 + 12\sigma - 18}{\sigma^2 - 2\sigma + 5}$$

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma^4 - 4\sigma^3 - 7\sigma^2 + 86\sigma + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -3.7 \\ \sigma_2 = -0.27 \\ \sigma_{3,4} = 3.99 \pm j2.79 \quad \notin \text{au lieu (à éliminer)} \end{cases}$$



- Valeurs du gain aux points de séparation et de rencontre sur l'axe réel :

✓ Calcul de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

La condition sur le module donne la valeur de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

$$|FTBO(\sigma)| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_{\sigma 1} = \left| -\frac{\sigma^3 + 5\sigma^2 + 12\sigma - 18}{\sigma^2 - 2\sigma + 5} \right|_{\sigma=-3.7} & \Rightarrow K_{\sigma 1} = 1.71 \\ K_{\sigma 2} = \left| -\frac{\sigma^3 + 5\sigma^2 + 12\sigma - 18}{\sigma^2 - 2\sigma + 5} \right|_{\sigma=-0.27} & \Rightarrow K_{\sigma 2} = 3.72 \end{cases}$$

- Intersection du lieu avec l'axe imaginaire :

$$\begin{cases} 1 + \frac{K(p^2 - 2p + 5)}{p^3 + 5p^2 + 12p - 18} = 0 \\ p = j\omega \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} K_{1,2} = 5.54 \\ \omega_{1,2} = \pm 0.96 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} K_{3,4} = -7.04 \\ \omega_{3,4} = \pm 5.11 \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{à exclure car } K \text{ ne peut pas être négatif}$$

Il y a donc 2 points d'intersection seulement :

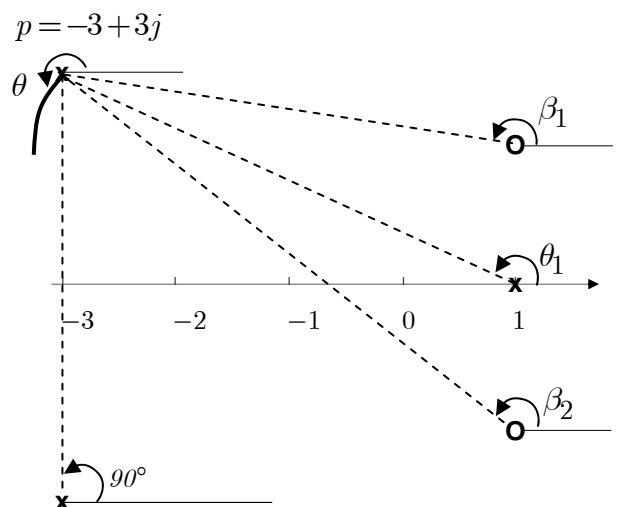
$$\Rightarrow \begin{cases} K_{1,2} = 5.54 \\ p_{1,2} = \pm j0.96 \end{cases}$$

- Angles de départ du lieu à partir des pôles complexes conjugués :

$\theta = 180^\circ - (\text{Somme des angles des vecteurs entre le pôle complexe concerné et les autres pôles})$
 $+ (\text{Somme des angles des vecteurs entre le pôle complexe concerné et les zéros})$

Considérons le pôle : $p = -3 + 3j$

$$\begin{cases} \theta_1 = 180^\circ - \arctg \frac{3}{4} = 143.13^\circ \\ \beta_1 = 180^\circ - \arctg \frac{1}{4} = 168.69^\circ \\ \beta_2 = 180^\circ - \arctg \frac{4}{4} = 135^\circ \end{cases}$$



$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - (90^\circ + 143.13^\circ) + (168.69^\circ + 135^\circ)$$

$$\Rightarrow \theta = 250.56^\circ$$

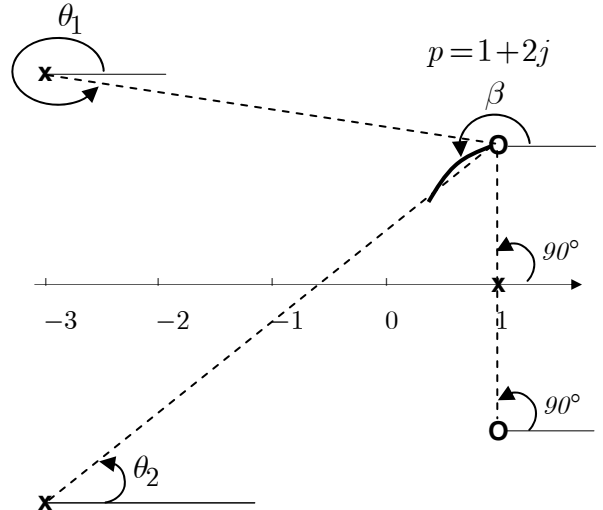
- Angles d'arrivée du lieu sur les pôles complexes conjugués :

$$\beta = 180^\circ - (\text{Somme des angles des vecteurs entre le zéro complexe concerné et les autres zéros})$$

$$+ (\text{Somme des angles des vecteurs entre le zéro complexe concerné et les pôles})$$

Considérons le pôle : $p = 1 + 2j$

$$\begin{cases} \theta_1 = -\arctg \frac{1}{4} = -36.87^\circ \\ \theta_2 = \arctg \frac{4}{4} = 45^\circ \end{cases}$$



$$\Rightarrow \beta = 180^\circ - (90^\circ) + (90^\circ - 36.87^\circ + 45^\circ)$$

$$\Rightarrow \beta = 188.13^\circ$$

- Stabilité :

✓ Calcul de $K_{\sigma 0}$ pour le point d'abscisse (0, 0).

La condition sur le module donne la valeur de $K_{\sigma 0}$:

$$|FTBO(\sigma)| = 1 \Rightarrow K_{\sigma 0} = \left| -\frac{\sigma^3 + 5\sigma^2 + 12\sigma - 18}{\sigma^2 - 2\sigma + 5} \right|_{\sigma=0} \Rightarrow K_{\sigma 0} = \frac{18}{5} = 3.6$$

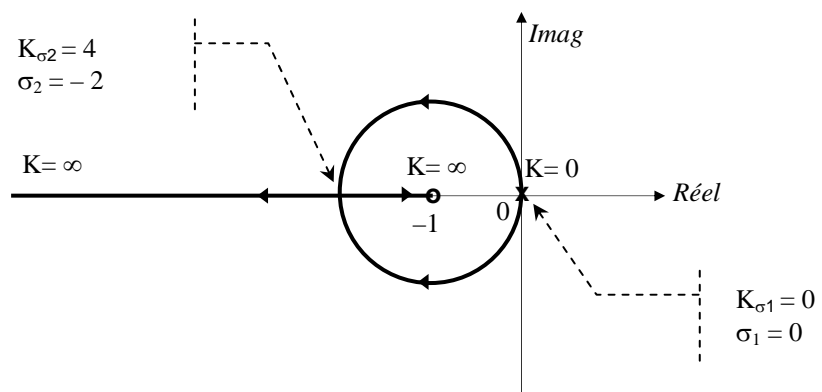
Comme on le voit sur le lieu d'Evans, le lieu est stable uniquement pour : $3.6 < K < 5.54$

f) $G(p) = \frac{p+1}{p^2} \quad H(p) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} FTBO(p) = \frac{K(p+1)}{p^2} \\ 1 + \frac{K(p+1)}{p^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{équation caractéristique})$$

- Points de départ du lieu (les pôles de la FTBO) : $\{p=0 \text{ (pôle double)} \Rightarrow n=2$

- Points d'arrivée du lieu (les zéros de la FTBO) : $\{p = -1\} \Rightarrow m = 1$
- Nombre de branches asymptotiques : $n - m = 2 - 1 = 1$ branche asymptotique
- Déviation des branches asymptotiques : $\varphi_i = \frac{\pm 180^\circ(2i+1)}{n-m} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$
 $\Rightarrow \varphi_i = \frac{\pm 180^\circ}{1}(2i+1) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$
 $\Rightarrow \varphi_i = 180^\circ \quad (1 \text{ angle})$
- Intersection des asymptotes sur l'axe réel : A ne pas calculer car il n'y a qu'une seule branche asymptotique.
- On commence à tracer une ébauche du lieu d'Evans.
 - ✓ On positionne les pôles et les zéros dans le plan complexes. Les pôles correspondent à $K=0$, les zéros à $K=\infty$.
 - ✓ On détermine les parties de l'axe réel qui appartiennent au lieu : $]-\infty \quad -1]$ et $[0]$.
 - ✓ On remarque qu'il y a 2 pôles confondus ($p = 0$). Donc, il y a forcément un point de séparation.



- Points σ de séparation ou de rencontre sur l'axe réel :

A partir de l'équation caractéristique : $1 + \frac{K(p+1)}{p^2} = 0$

$$K(p) = -\frac{p^2}{(p+1)} \Rightarrow K(\sigma) = -\frac{\sigma^2}{(\sigma+1)}$$

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -2 \end{cases}$$

Les 2 racines appartiennent au lieu. Elles forment donc des points de séparation et de rencontre.

- Valeurs du gain aux points de séparation et de rencontre sur l'axe réel :

- ✓ Calcul de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

La condition sur le module donne la valeur de $K_{\sigma 1}$ et de $K_{\sigma 2}$:

$$|FTBO(\sigma_1)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_{\sigma_1} = \left| \frac{\sigma^2}{(\sigma + 1)} \right|_{\sigma=0} \quad \Rightarrow \quad K_{\sigma_1} = 0$$

$$|FTBO(\sigma_2)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_{\sigma_2} = \left| \frac{\sigma^2}{(\sigma + 1)} \right|_{\sigma=-2} \quad \Rightarrow \quad K_{\sigma_2} = 4$$

- Détermination de l'équation du cercle :

Nous pouvons montrer que le lieu est un cercle en coordonnées polaires en posant $p = x + jy$ dans l'équation caractéristique du système.

$$\begin{cases} 1 + \frac{K(p+1)}{p^2} = 0 \\ p = x + jy \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x + jy)^2 + K(x + jy + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2jxy - y^2 + x + jy + 1 = 0$$

à terminer, voir OGATA 2/3

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 + 2jxy - y^2 + jy = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - x + 1 + 2jxy - y^2 + jy = 0$$

Ceci est l'équation d'un cercle de rayon 1 et de centre $(-1, 0)$.

Nous pouvons retrouver les valeurs de σ_1 et de σ_2 en considérant uniquement la position du cercle et son rayon :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \text{centre} + \text{rayon} = -1 + 1 = 0 \\ \sigma_2 = \text{centre} - \text{rayon} = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

- Stabilité :

Lorsque le gain K varie entre 0 et ∞ , les racines de l'équation caractéristique (c'est-à-dire les pôles de la FTBF) restent dans le demi-plan gauche du plan complexe (racines réelles négatives ou complexes conjuguées à partie réelle négative). Le système reste donc toujours stable.

- Pour quelles valeurs du gain K le système est-il oscillant amorti ?

Le système est oscillant amorti lorsque les pôles sont complexes conjugués, c'est-à-dire, pour :

$$K_{\sigma_1} < K < K_{\sigma_2}$$

- ✓ Si on veut obtenir un système dont $\xi = 0.5$, que doit valoir le gain K ?
- ✓ Donner, dans ce cas, les valeurs de ω_n et $d\%$, ainsi que la position des pôles correspondants en boucle fermée.